

AL2 - CC2 - Correction

Exercice 1:

1) Soit $P \in K[X]$. P est irréductible (s'il est non constant et) si

$$\forall P_1, P_2 \in K[X], P = P_1 P_2 \Rightarrow \deg P_1 = 0 \text{ ou } \deg P_2 = 0.$$

Supposons $\deg P = 3$.

• Si P a une racine α , alors $X - \alpha$ divise P donc P n'est pas irréductible.

• Si P n'a pas de racine, par l'absurde, si P n'était pas irréductible, alors on aurait

$$P = P_1 P_2 \text{ avec } \deg P_1 = 1 \text{ et } \deg P_2 = 2 \\ \text{ou } \deg P_1 = 2 \text{ et } \deg P_2 = 1.$$

Dans tous les cas, le polynôme de degré 1 admet une racine, et donc P aurait aussi une racine, absurde.

Le polynôme $(X^2 + 1)^2$ est sans racines dans $\mathbb{R}[X]$ mais n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$.

$$2) X_{C_P}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & & & \\ 0 & -1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}. \quad \begin{array}{l} \text{On procède par récurrence sur } n. \\ \text{Pour } n=1, |X-a| = X-a \checkmark. \end{array}$$

On développe selon la première colonne:

$$\begin{aligned} X_{C_P}(X) &= X \underbrace{\begin{vmatrix} X & & & \\ -1 & X & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}}_{= X_{C_P}(X)} + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & & \\ 0 & & & \\ & & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= X(a_1 + a_2 X + \dots + a_{n-1} X^{n-2} + X^{n-1}) + a_0 (-1)^n (-1)^n \\ &= P(X). \end{aligned}$$

3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique soit scindé. Alors il existe un unique couple $(d, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} u = d + m \\ m \text{ est nilpotent, } d \text{ est diagonalisable} \\ dm = md. \end{cases}$$

Exercice 2:

1) X^{2026} est un polynôme annulateur de M , donc le polynôme minimal de M est de la forme $p_M(X) = X^k$ pour un certain entier k , donc le polynôme caractéristique de M est X^n .
 Pour le théorème de Cayley-Hamilton, on a $M^n = 0$. VRAI

2) VRAI: C'est le noyau du morphisme de groupes

$$\det: GL_n(R) \rightarrow R^* \\ M \mapsto \det(M).$$

3) On calcule son polynôme caractéristique:

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ -1 & X-2 & -2 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & 1 \\ 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X-1)$$

On cherche la dimension de $\ker(A - 2I_3)$:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est clairement de rang 2, donc par le théorème du rang } \dim \ker(A - 2I_3) = 1 < 2.$$

Donc A n'est pas diagonalisable. FAUX

4) FAUX Le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice nilpotente dans $M_n(R)$ est X^n . C'est en particulier le polynôme caractéristique de la matrice nulle, mais aucune autre matrice nilpotente ne lui est conjuguée.

(On peut donner beaucoup d'autres preuves).

AL2 - CC2 - Correction

Bonus: On peut raisonner avec des blocs de Jordan ou, sinon:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sont diagonalisables donc leurs}$$

polynômes minimaux sont scindés: $\mu_A(x) = \mu_B(x) = (x-1)(x-2)$.

Mais $\chi_A \neq \chi_B$ donc elles ne sont pas semblables.

Exercice 3: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $P \in \mathbb{C}[X]$.

1) Dans $\mathbb{C}$ tous les polynômes sont scindés donc χ_A est scindé donc A est trigonalisable: Soit $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

telles que $A = QTQ^{-1}$.

Alors si $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$, on a

$$\begin{aligned} P(A) &= P(QTQ^{-1}) = \sum_{k=0}^N a_k QT^kQ^{-1} \\ &= QP(T)Q^{-1} \end{aligned}$$

En particulier, $P(T)$ est de la forme $\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & * \\ & P(\lambda_2) & \\ (0) & & \ddots & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

donc les valeurs propres de $P(A)$ sont $\{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)\}$. (Le spectre est invariant par conjugaison).

2) $P(A) \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp}(P(A))$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Sp}(A), P(\lambda) \neq 0$$

$\Leftrightarrow \mu_A \wedge P = 1$. car les polynômes sont scindés.

3) C'est la même démonstration que dans le vrai/faux:

$X_N(x) = x^m$ donc $Sp(N) = \{0\}$, puisque les valeurs propres sont exactement les racines de X_N .

4) $P(A)$ est nilpotente $\Leftrightarrow Sp(P(A)) = \{0\}$ (on travaille dans $\mathbb{C}$).

$\Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(A), P(\lambda) = 0$ (question 1).

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i) \mid P.$$